Varianta 014

Subiectul I

a) -1. b) $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$; c) a=0,b=1. d) $\frac{24}{5}$; e) y=2. f) $a = 8$.

Subiectul II

1. a) S={ $\sqrt{e}, e$ }. b) 256. c) 16. d) $\frac{2}{7}$; e) x=1 este singura rădăcină reală.

2. a) ∞. b) $f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. c) $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}$. d) $f'(1) = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$. e) $\sqrt{2}$.

Subiectul III

a) Evident.

b) $x_{1,2} \notin \mathbf{R}$.

c) Evident, sumă de pătrate de numere reale.

d) Din relația de la c) obținem

$(y_1^2 + ... + y_n^2)t^2 - 2nt + \frac{1}{y_1^2} + ... + \frac{1}{y_1^2} \geq 0, \forall t \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \Delta = 4n^2 - 4(y_1^2 + ... + y_n^2)(\frac{1}{y_1^2} + ... + \frac{1}{y_n^2}) \leq 0$, de unde rezultă relația cerută.

e) Din relațiile lui Viete obținem $x_1 + x_2 + ... + x_n = \pm 1$

S= $x_1^2 + ... + x_n^2 = (x_1 + ... + x_n)^2 - 2(x_1x_2 + ... + x_{n-1}x_n) = 1 - 2(x_1x_2 + ... + x_{n-1}x_n)$

Dacă $(x_1x_2 + ... + x_{n-1}x_n) = 1 \Rightarrow S = -1,$ deci nu toate rădăcinile sunt reale, ceea ce contrazice ipoteza.

Așadar $(x_1x_2 + ... + x_{n-1}x_n) = -1$. Rezultă că S=3.

f) Se presupune că $f \in M$, grad $f = n$ şi fie $x_1, ..., x_n$ rădăcinile lui f. Avem conform punctului c) $x_1^2 + ... + x_n^2 = 3$ şi analog se arată că $\frac{1}{x_1^2} + ... + \frac{1}{x_n^2} = 3$, de unde aplicând inegalitatea de la punctul e) obținem $9 \geq n^2$, deci n≤ 3.

g) Polinoamele de gradul I sunt x+1,-x-1,-x+1,x-1.

Polinoamele de gradul II sunt $x^2 - x - 1$ si $-x^2 + x + 1$, $x^2 + x - 1$,$-x^2 - x + 1$

Polinoamele de gradul III sunt $x^3 - x^2 - x + 1$, $x^3 + x^2 - x - 1$, $-x^3 + x^2 + x - 1$, $-x^3 - x^2 + x + 1$

Subiectul IV

a) $f'(x) = \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{3}\sin x$.

b) $| f'(x) | \leq \frac{1}{2} | \cos x | + \frac{1}{3} | \sin x | \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \leq \frac{5}{6}, \forall x \in \mathbf{R}$.

c) Aplicând teorema lui *Lagrange* funcției f pe intervalul [x,y], rezultă că există $c \in (x, y)$ astfel încât f(x)-f(y)= $f'(c) \cdot (x - y)$. Folosind b) rezultă inegalitatea cerută.

d) $g'(x) = 1 - f'(x), \forall x \in \mathbf{R}$ .Folosind b) rezultă ca $g'(x) \geq \frac{1}{6} > 0, \forall x \in \mathbf{R}$.

e) Din d) => g injectiva . Im g=**R** pentru ca $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Deci, g este bijectiva. Aşadar pentru y=0, exista un unic $u \in \mathbf{R}$ astfel încât g(u)=0

f) Avem: $\left|x_n - u\right| = \left|f\left(x_{n-1}\right) - f\left(u\right)\right| \le \frac{5}{6}\left|x_{n-1} - u\right|, \forall \text{n} \ge 1$. Aplicând succesiv această relație obținem

$| x_{n+1} - u | \le \left(\frac{5}{6}\right)^{n+1} | x_0 - u |$

g) Cum $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1} | x_0 - u | = 0$, obținem $\lim_{n\to\infty} | x_{n+1} - u | = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} x_{n+1} = u$.